Chương 2

ĐẠI SỐ BOOLE

2.1. CÁC TIÊN ĐỀ VÀ ĐỊNH LÝ ĐẠI SỐ BOOLE

2.1.1. Các tiên đề

Cho một tập hợp B hữu hạn trong đó người ta trang bị các phép toán + (cộng logic), x (nhân logic), ‑ (bù logic) và hai phần tử 0 và 1 lập thành một cấu trúc đại số Boole.

$\forall$x,y $\in$ B thì: x + y $\in$ B, x.y $\in$ B thỏa mãn 5 tiên đề sau:

2.1.1.1. Tiên đề giao hoán

$\forall x,y \in B$: $x + y = y + x$

2.1.1.2. Tiên đề phối hợp

$\forall x,y,z \in B$: $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$

$(x.y).z = x.(y.z) = x.y.z$

2.1.1.3. Tiên đề phân bố

$\forall x,y,z \in B$: $x.(y + z) = x.y + x.z$

$x + (y.z) = (x + y)(x + z)$

2.1.1.4. Tiên đề về phần tử trung hòa

Trong tập B tồn tại hai phần tử trung hòa, đó là phần tử đơn vị và phần tử kh, phần tử đơn vị ký hiệu là 1, phần tử 0 ký hiệu là 0.

$\forall x \in B$: $x + 1 = 1$

$x . 1 = x$

$x + 0 = x$

$x . 0 = 0$

2.1.1.5. Tiên đề về phần tử bù

$\forall x \in B$, bao giờ cũng tồn tại phần tử bù tương ứng sao cho luôn thỏa mãn:

$x + \overline{x} = 0$

$$x.\bar{x} = 0$$

Nếu B = B* = {0, 1} và thỏa mãn 5 tiên đề trên thì cũng lập thành cấu trúc đại số Boole nhưng là cấu trúc đại số Boole nhỏ nhất.

2.1.2. Các định lý

2.1.2.1 Vấn đề đối ngẫu trong đại số Boole

Hai mệnh đề (hai biểu thức, hai định lý) được gọi là đối ngẫu với nhau nếu trong mệnh đề này người ta thay phép toán cộng thành phép toán nhân và ngược lại,thay 0 bằng 1 và ngược lại thì sẽ suy ra được mệnh đề kia.

Khi hai mệnh đề đối ngẫu với nhau, nếu 1 trong 2 mệnh đề được chứng minh là đúng thì mệnh đề còn lại là đúng.

Ví dụ:

$$x.(y + z) = (x.\ y) + (x.\ z)$$
$$x + (y.\ z) = (x + y)(x + z)$$

Ví dụ:

$$x + \bar{x} = 1$$
$$x.\bar{x} = 0$$

2.1.2.2. Các định lý

a. Định lý về phần tử bù là duy nhất

$\forall x, y \in B$:

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x.y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow y = \bar{x}$$

$\forall x \in B$:

$$x + x + \ldots\ldots + x = x$$
$$x.\ x.\ x.\ \ldots\ldots\ x = x$$

b. Định lý De Morgan

$\forall x, y, z \in B$, ta có:

$$\overline{x + y + z} = \bar{x}.\bar{y}.\bar{z}$$
$$\overline{x.y.z} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

$\forall x \in B$, ta có:

$$\bar{\bar{x}} = x$$

$\forall x, y, z \in B$, ta có:

$$x + y + z = \overline{\overline{x + y + z}} = \overline{\overline{x}.\overline{y}.\overline{z}}$$

$$x.\ y.\ z = \overline{\overline{x.y.z}} = \overline{\overline{x} + \overline{y} + \overline{z}}$$

$\forall x, y \in B$, ta có:

$$x.\ (\overline{x} + y) = x.y$$

$$x + (\overline{x}.\ y) = x + y$$

$\forall x, y \in B$, ta có:

$$x + x.\ y = x$$

$$x.(x + y) = x$$

Với $0, 1 \in B$, ta có: $\overline{0} = 1$ và $\overline{1} = 0$

2.2. HÀM BOOLE VÀ CÁC PHƯƠNG PHÁP BIỂU DIỄN

2.2.1. Hàm Boole

2.2.1.1. Định nghĩa

Hàm Boole là một ánh xạ Boole từ đại số Boole vào chính nó. Tức là $\forall x, y \in B$ được gọi là biến Boole thì hàm Boole, ký hiệu là f, được hình thành trên cơ sở liên kết các biến Boole bằng các phép toán + (cộng logic), x (nhân logic), hoặc nghịch đảo logic (¯). Hàm Boole đơn giản nhất là hàm Boole theo 1 biến Boole.

Ký hiệu: $f(x) = x$

$f(x) = \overline{x}$

$f(x) = \alpha$ (α: là hằng số)

Trong trường hợp tổng quát, ta có hàm Boole theo n biến Boole được ký hiệu như sau: $f(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n)$

2.2.1.2. Các tính chất của hàm Boole

Nếu $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hàm Boole thì:

+ $\alpha.f(x_1, x_2, ..., x_n)$ cũng là một hàm Boole.

+ $\overline{f}(x_1, x_2, ..., x_n)$ cũng là một hàm Boole.

Nếu $f_1(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ là những hàm Boole thì:

+ $f_1(x_1, x_2, ..., x_n) + f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ cũng là một hàm Boole.

+ $f_1(x_1, x_2, ..., x_n).f_2(x_1, x_2, ..., x_n)$ cũng là một hàm Boole.

Vậy, một hàm Boole f cũng được hình thành trên cơ sở liên kết các hàm Boole bằng các phép toán + (cộng logic), x (nhân logic) hoặc nghịch đảo logic (-).

2.2.1.3. Giá trị của hàm Boole

Gọi $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hàm Boole theo biến Boole.

Trong f người ta thay các biến x_i bằng các giá trị cụ thể α_i $(i = \overline{1, n})$ thì hàm $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,..., \alpha_n)$ được gọi là giá trị của hàm Boole theo n biến.

Ví dụ: Xét hàm $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

Xét $B = B^* = \{0,1\}$

Nếu $x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow f(0,0) = 0$

Nếu $x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow f(0,1) = 1$

Nếu $x_1 = 1, x_2 = 0 \Rightarrow f(1,0) = 1$

Nếu $x_1 = 1, x_2 = 1 \Rightarrow f(1,1) = 1$

Ta lập được bảng giá trị của hàm trên.

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ví dụ: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2.x_3$

Xét $B = B^* = \{0,1\}$

Bảng giá trị của hàm:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2.2.2. Các phương pháp biểu diễn hàm Boole

2.2.2.1. Phương pháp bảng

Là phương pháp thường dùng để biểu diễn hàm số nói chung. Phương pháp này gồm một bảng được chia làm hai phần:

- Một phần dành cho biến để ghi các tổ hợp giá trị có thể có của biến.
- Một phần dành cho hàm để ghi các giá trị của hàm ra tương ứng với các tổ hợp của các biến vào.

2.2.2.2. Phương pháp giải tích

Là phương pháp biểu diễn hàm Boole dưới dạng tổng các tích số, hoặc dưới dạng tích của các tổng số. Dạng tổng của các tích số gọi là **dạng chính tắc thứ nhất**, còn dạng tích của các tổng là **dạng chính tắc thứ hai** của hàm Boole, và hai dạng chính tắc này là đối ngẫu nhau.

a. Dạng chính tắc 1(Dạng tổng của các tích số)

Xét các hàm Boole đơn giản sau đây: $f(x) = x$, $f(x) = \overline{x}$, $f(x) = \alpha$.

Xét f(x) = x:

Ta có: $x = 0.\overline{x} + 1.x$

mặt khác:

$$f(x) = x \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

suy ra $f(x) = x$ có thể biểu diễn:

$$f(x) = x = f(0).\overline{x} + f(1).x$$

trong đó: f (0), f (1) được gọi là giá trị của hàm Boole theo một biến.

Xét f(x) = $\overline{x}$:

Ta có: $\overline{x} = 1.\overline{x} + 0.x$

Mặt khác:

$$f(x) = \overline{x} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Suy ra: $f(x) = \overline{x}$ có thể biểu diễn:

$$f(x) = \overline{x} = f(0).\overline{x} + f(1).x$$

Xét f(x) = α:

Ta có: $\alpha = \alpha.1 = \alpha(x + \overline{x}) = \overline{x}.\alpha + \alpha.x$

Mặt khác:

$$f(x) = \alpha \Rightarrow \begin{cases} f(1) = \alpha \\ f(0) = \alpha \end{cases}$$

Suy ra f(x) = α có thể được biểu diễn:

$$f(x) = \alpha = f(0).\overline{x} + f(1).x$$

Kết luận:

Dù là f(x) = x, f(x) = $\overline{x}$ hay f(x) = α, ta đều có dạng:

$$f(x) = f(0).\overline{x} + f(1).x$$

Vậy $f(x) = f(0).\overline{x} + f(1).x$ trong đó f (0), f (1) được gọi là giá trị của hàm Boole theo một biến, được gọi là **dạng chính tắc thứ nhất** (dạng tổng của các tích) theo một biến.

Trong trường hợp hai biến f(x_1, x_2) thì cách biểu diễn cũng hoàn toàn dựa trên cách biểu diễn của dạng chính tắc thứ nhất theo 1 biến (trong đó xem một biến là hằng số).

Ta có:

$$f(x_1, x_2) = f(0, x_2).\overline{x}_1 + f(1,x_2).x_1$$

mà: $f(0, x_2) = f(0,0).\overline{x}_2 + f(0,1).x_2$

và: $f(1, x_2) = f(1,0).\overline{x}_2 + f(1,1).x_2$

Suy ra:

$$f(x_1, x_2) = f(0,0)\overline{x}_1\overline{x}_2 + f(0, 1)\overline{x}_1x_2 + f(1,0)x_1\overline{x}_2 + f(1,1)x_1x_2$$

Vậy: $$f(x_1, x_2) = \sum_{e=0}^{2^2-1} f(\alpha_1, \alpha_2)x_1^{\alpha 1}x_2^{\alpha 2}$$

trong đó e là số thập phân tương ứng với mã (α_1, α_2) và:

$$x_1^{\alpha_1} = \begin{cases} x_1 & \text{nếu } \alpha_1 = 1 \\ \overline{x}_1 & \text{nếu } \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

$$x_2^{\alpha_2} = \begin{cases} x_2 & \text{nếu } \alpha_2 = 1 \\ \overline{x}_2 & \text{nếu } \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Tổng quát cho n biến:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{e=0}^{2^n-1} f(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$$

trong đó e là số thập phân tương ứng với mã nhị phân $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$;

và:
$$x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} x_i & \text{nếu } \alpha_i = 1 \\ \overline{x}_i & \text{nếu } \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Ví dụ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{e=0}^{2^3-1} f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3).\ x_1^{\alpha 1}.\ x_2^{\alpha 2}.\ x_3^{\alpha 3}$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = {} & f(0,0,0)\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + f(0,0,1)\overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 + f(0,1,0)\overline{x}_1 x_2\overline{x}_3 \\ & + f(0,1,1)\overline{x}_1 x_2 x_3 + f(1,0,0) x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + f(1,0,1)x_1\overline{x}_2 x_3 \\ & + f(1,1,0) x_1 x_2\overline{x}_3 + f(1,1,1) x_1 x_2 x_3 \end{aligned}$$

Vậy dạng chính tắc thứ nhất là dạng tổng của các tích mà trong mỗi tích số chứa đầy đủ các biến Boole dưới dạng thật hoặc dạng bù (nghịch đảo).

b. Dạng chính tắc 2 (tích của các tổng):

Đây là dạng đối ngẫu của dạng chính tắc 1 nên biểu thức tổng quát của dạng chính tắc thứ hai cho n biến là:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{e=0}^{2^{n-1}} [f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + x_1^{\alpha 1} + x_2^{\alpha 2} + ... + x_n^{\alpha n})]$$

trong đó e là số thập phân tương ứng của mã nhị phân $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$;

và:

$$x_i^{\alpha_i} = \begin{cases} \overline{x}_i & \text{nếu } \alpha_i = 1 \\ x_i & \text{nếu } \alpha_i = 0 \end{cases}$$

Ví dụ:

$$f(x_1,x_2)=[f(0,0)+x_1+x_2][f(0,1)+x_1+\overline{x}_2][f(1,0)+\overline{x}_1+x_2][f(1,1)+\overline{x}_1+\overline{x}_2]$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = \; & [f(0,0,0)+x_1+x_2+x_3].[f(0,0,1)+x_1+x_2+\overline{x}_3]. \\ & [f(0,1,0)+x_1+\overline{x}_2+x_3].[f(0,1,1)+x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3]. \\ & [f(1,0,0)+\overline{x}_1+x_2+x_3].[f(1,0,1)+\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3]. \\ & [f(1,1,0)+\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3].[f(1,1,1)+\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3] \end{aligned}$$

Vậy, dạng chính tắc thứ hai là dạng tích của các tổng số mà trong đó mỗi tổng số này chứa đầy đủ các biến Boole dưới dạng thật hoặc dạng bù.

Chú ý:

Xét ví dụ 1: $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$,

Viết dưới dạng chính tắc 1:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= 0.\overline{x}_1\overline{x}_2 + 1.\overline{x}_1.x_2 + 1.x_1.\overline{x}_2 + 1.x_1.x_2 \\ &= \overline{x}_1.x_2 + x_1.\overline{x}_2 + x_1.x_2 \end{aligned}$$

Từ ví dụ trên ta thấy: Dạng chính tắc thứ nhất là dạng liệt kê tất cả các tổ hợp nhị phân các biến vào sao cho tương ứng với những tổ hợp đó giá trị của hàm ra bằng 1. Khi liệt kê nếu biến tương ứng bằng 1 được viết ở dạng thật (x), và biến tương ứng bằng 0 được viết ở dạng bù ($\overline{x}$).

Xét ví dụ 2: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2.x_3$

Viết dưới dạng chính tắc 2:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = \; & [0+x_1+x_2+x_3].[0+x_1+x_2+\overline{x}_3].[0+x_1+\overline{x}_2+x_3]. \\ & [1+x_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3].[1+\overline{x}_1+x_2+x_3].[1+\overline{x}_1+x_2+\overline{x}_3]. \\ & [1+\overline{x}_1+\overline{x}_2+x_3].[1+\overline{x}_1+\overline{x}_2+\overline{x}_3] \end{aligned}$$

Hay: $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2.x_3 = [x_1+x_2+x_3].[x_1+x_2+\overline{x}_3].[x_1+\overline{x}_2+x_3]$

Vậy, dạng chính tắc thứ hai là dạng liệt kê tất cả các tổ hợp nhị phân các biến vào sao cho tương ứng với những tổ hợp đó giá trị của hàm ra bằng 0. Khi liệt kê nếu biến tương ứng bằng 0 được viết ở dạng thật (x), và biến tương ứng bằng 1 được viết ở dạng bù ($\overline{x}$).

Xét ví dụ đơn giản sau để hiểu rõ hơn về cách thành lập bảng giá trị của hàm, tìm hàm mạch và thiết kế mạch: Hãy thiết kế mạch điện sao cho khi công tắc 1 đóng thì đèn đỏ, công tắc 2 đóng đèn đỏ, cả hai công tắc đóng đèn đỏ.

Giải

Ta qui định:

- Công tắc hở : 0 Đèn tắt : 0
- Công tắc đóng: 1 Đèn đỏ : 1

Lúc đó ta có bảng trạng thái mô tả hoạt động của mạch:

Công tắc 1 x_1	Công tắc 2 x_2	Đèn $f(x_1,x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Viết theo dạng chính tắc 1 ta có:

$$f(x_1, x_2) = 0.\overline{x}_1\overline{x}_2 + 1.\overline{x}_1.x_2 + 1.x_1.\overline{x}_2 + 1.x_1.x_2$$
$$= \overline{x}_1.\ x_2 + x_1.\overline{x}_2 + x_1.x_2$$
$$= \overline{x}_1.\ x_2 + x_1(\overline{x}_2 + x_2)$$
$$= \overline{x}_1.\ x_2 + x_1 = x_1 + x_2$$

Viết theo dạng chính tắc 2 ta có:

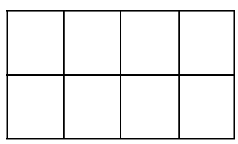
$$f(x_1, x_2) = [0+x_1+x_2].[1+x_1+\overline{x}_2].[1+\overline{x}_1+x_2].[1+\overline{x}_1+\overline{x}_2]$$
$$= [x_1+x_2].1.1.1 = x_1 + x_2$$

Vậy, dù viết theo dạng chính tắc 1 hay chính tắc 2 ta đều có hàm mạch:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

2.2.2.3. Phương pháp biểu diễn bằng bảng Karnaugh

Đây là cách biểu diễn lại của phương pháp bảng dưới dạng bảng gồm các ô vuông có dạng như hình bên.



Trên bảng này người ta bố trí các biến vào theo hàng hoặc theo cột của bảng. Trong trường hợp số lượng biến vào là chẵn, người ta bố trí số lượng biến vào theo hàng ngang bằng số lượng biến vào theo cột dọc của bảng. Trong trường hợp số lượng biến vào là lẻ, người ta bố trí số lượng biến vào theo hàng ngang nhiều hơn số lượng biến vào theo cột dọc 1 biến hoặc ngược lại.

Các tổ hợp giá trị của biến vào theo hàng ngang hoặc theo cột dọc của bảng được bố trí sao cho khi ta đi từ một ô sang một ô lân cận với nó chỉ làm thay đổi một giá trị của biến, như vậy thứ tự bố trí hay sắp xếp các tổ hợp giá trị của biến vào theo hàng ngang hoặc theo cột dọc của bảng Karnaugh hoàn toàn tuân thủ theo mã Gray. Giá trị ghi trong mỗi ô vuông này chính là giá trị của hàm ra tương ứng với các tổ hợp giá trị của biến vào. Ở những ô mà giá trị hàm là không xác định, có nghĩa là giá trị của hàm là tùy ý (hay tùy định), người ta kí hiệu bằng chữ x. Nếu có n biến vào sẽ có 2n ô vuông.

2.3. TỐI THIỂU HÀM BOOLE

2.3.1. Đại cương

Trong thiết bị máy tính người ta thường thiết kế gồm nhiều modul (khâu) và mỗi modul này được đặc trưng bằng một phương trình logic. Trong đó, mức độ phức tạp của sơ đồ tùy thuộc vào phương trình logic biểu diễn chúng. Việc đạt được độ ổn định cao hay không là tùy thuộc vào phương trình logic biểu diễn chúng ở dạng tối thiểu hóa hay chưa. Để thực hiện được điều đó, khi thiết kế mạch số người ta đặt ra vấn đề tối thiểu hóa các hàm logic. Điều đó có nghĩa là phương trình logic biểu diễn sao cho thực sự gọn nhất (số lượng các phép tính và số lượng các số được biểu diễn dưới dạng thật hoặc bù là ít nhất).

Tuy nhiên trong thực tế, không phải lúc nào cũng đạt được lời giải tối ưu cho bài toán tối thiểu hóa.

2.3.2. Các bước tiến hành tối thiểu hóa

- Dùng các phép tối thiểu để tối thiểu hóa các hàm số logic.
- Rút ra những thừa số chung nhằm mục đích tối thiểu hóa thêm một bước nữa các phương trình logic.

2.3.3. Các phương pháp tối thiểu hóa

2.3.3.1. Phương pháp giải tích

Đó là phương pháp tối thiểu hóa hàm Boole (phương trình logic) dựa vào các tiên đề, định lý của đại số Boole.

Ví dụ:

$$f(x_1, x_2) = \overline{x}_1x_2 + x_1\overline{x}_2 + x_1x_2 = (\overline{x}_1 + x_1)x_2 + x_1\overline{x}_2$$
$$= x_2 + x_1\overline{x}_2 = x_2 + x_1$$

Ví dụ:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{x}_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2\overline{x}_3 + x_1x_2x_3 \\ &= \overline{x}_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 + x_1\overline{x}_2x_3 + x_1x_2(\overline{x}_3 + x_3) \\ &= \overline{x}_1x_2x_3 + x_1\overline{x}_2(\overline{x}_3 + x_3) + x_1x_2 \\ &= \overline{x}_1x_2x_3 + x_1(\overline{x}_2 + x_2) \\ &= \overline{x}_1x_2x_3 + x_1 \\ &= x_1 + x_2x_3 \end{aligned}$$

2.3.3.2. Phương pháp bảng Karnaugh

a. Tối thiểu hóa hàm Boole bằng bảng Karnaugh

Để tối thiểu hóa hàm Boole bằng phương pháp bảng Karnaugh phải tuân thủ theo qui tắc về ô kế cận: ***"Hai ô được gọi là kế cận nhau là hai ô mà khi ta từ ô này sang ô kia chỉ làm thay đổi giá trị của 1 biến. "***

Quy tắc chung của phương pháp rút gọn bằng bảng Karnaugh là gom (kết hợp) các ô kế cận lại với nhau. Khi gom 2 ô kế cận nhau sẽ loại được 1 biến (2 ô $=2^1$ loại 1 biến). Khi gom 4 ô kế cận sẽ loại được 2 biến (4 ô $=2^2$ loại 2 biến). Khi gom 8 ô kế cận sẽ loại được 3 biến (8 ô $= 2^3$ loại 3 biến).

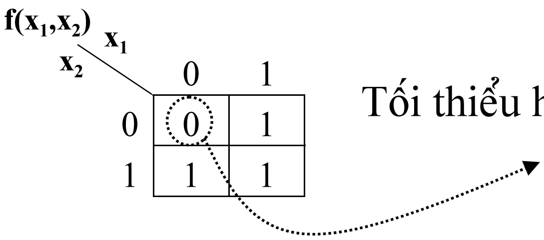
Tổng quát, khi gom 2^n ô kế cận sẽ loại được n biến. Những biến bị loại là những biến khi ta đi vòng qua các ô kế cận mà giá trị của chúng thay đổi.

Những điều cần lưu ý:

- Vòng gom được gọi là hợp lệ khi trong vòng gom đó có ít nhất 1 ô chưa thuộc vòng gom nào.
- Việc kết hợp những ô kế cận với nhau còn tùy thuộc vào phương pháp biểu diễn hàm Boole theo dạng chính tắc 1 hoặc chính tắc 2. Điều này có nghĩa là: nếu ta biểu diễn hàm Boole theo dạng chính tắc 1 thì ta chỉ quan tâm những ô kế cận nào có giá trị bằng 1 và tùy định, ngược lại nếu ta biểu diễn hàm Boole dưới dạng chính tắc 2 thì ta chỉ quan tâm những ô kế cận nào có giá trị bằng 0 và tùy định. Ta quan tâm những ô tùy định sao cho những ô này kết hợp với những ô có giá trị bằng 1 (nếu biểu diễn theo dạng chính tắc 1) hoặc bằng 0 (nếu biểu diễn theo dạng chính tắc 2) sẽ làm cho số lượng ô kế cận là 2n lớn nhất.
- Các ô kế cận muốn gom được phải là kế cận vòng tròn nghĩa là ô kế cận cuối cũng là ô kế cận đầu tiên.

c. Các ví dụ

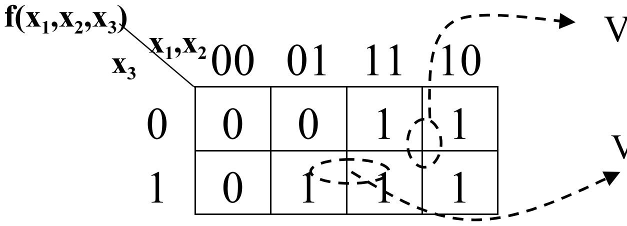
Ví dụ 1: Tối thiểu hóa hàm sau bằng phương pháp bảng Karnaugh.



Tối thiểu hóa theo dạng chính tắc 2:

$$\mathbf{f(x_1,x_2) = x_1 + x_2}$$

Ví dụ 2: Tối thiểu hóa hàm sau bằng phương pháp bảng Karnaugh.



Vòng gom 1: $\mathbf{x_1}$

Vòng gom 2: $\mathbf{x_2.x_3}$

Tối giản theo dạng chính tắc 1: Ta chỉ quan tâm đến những ô có giá trị bằng 1 và tùy định, như vậy sẽ có 2 vòng gom để phủ hết các ô có giá trị bằng 1: vòng gom 1 gồm 4 ô kế cận, và vòng gom 2 gồm 2 ô kế cận (hình vẽ).

Đối với vòng gom 1: Có 4 ô = 2^2 nên sẽ loại được 2 biến. Khi đi vòng qua 4 ô kế cận trong vòng gom chỉ có giá trị của biến x_1 không đổi (luôn bằng 1), còn giá trị của biến x_2 thay đổi (từ $1\rightarrow0$) và giá trị của biến x_3 thay đổi (từ $0\rightarrow1$) nên các biến x_2 và x_3 bị loại, chỉ còn lại biến x_1 trong kết quả của vòng gom 1. Vì x_1=1 nên kết quả của vòng gom 1 theo dạng chính tắc 1 sẽ có x1 viết ở dạng thật: x_1

Đối với vòng gom 2: Có 2 ô = 2^1 nên sẽ loại được 1 biến. Khi đi vòng qua 2 ô kế cận trong vòng gom giá trị của biến x_2 và x_3 không đổi, còn giá trị của biến x_1 thay đổi (từ $0\rightarrow1$) nên các biến x_2 và x_3 được giữ lại, chỉ có biến x_1 bị loại. Vì x_2=1 và x_3=1 nên kết quả của vòng gom 2 theo dạng chính tắc 1 sẽ có x_2 và x_3 viết ở dạng thật: $x_2.x_3$

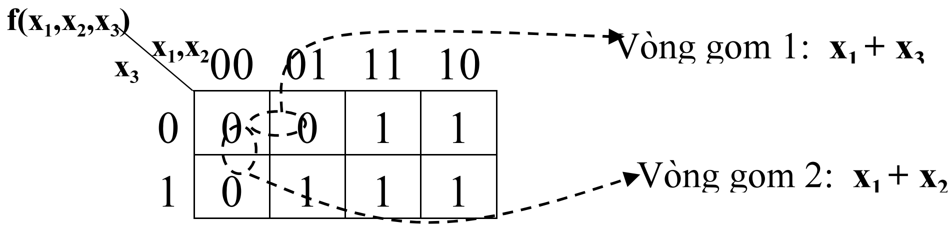
Kết hợp 2 vòng gom ta có kết quả tối giản theo dạng chính tắc 1:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2.x_3$$

Tối giản theo dạng chính tắc 2: Ta quan tâm đến những ô có giá trị bằng 0 và tùy định, như vậy cũng có 2 vòng gom (hình vẽ), mỗi vòng gom đều gồm 2 ô kế cận.

Đối với vòng gom 1: Có 2 ô = 2^1 nên loại được 1 biến, biến bị loại là x_2 (vì có giá trị thay đổi từ $0\rightarrow1$). Vì x_1=0 và x_3=0 nên kết quả của vòng gom 1 theo dạng chính tắc 2 sẽ có x_1 và x_3 ở dạng thật: $x_1 + x_3$.

Đối với vòng gom 2: Có 2 ô = 2^1 nên loại được 1 biến, biến bị loại là x_3 (vì có giá trị thay đổi từ $0 \rightarrow 1$). Vì x_1=0 và x_2=0 nên kết quả của vòng gom 2 theo dạng chính tắc 2 sẽ có x_1 và x_2 ở dạng thật: $x_1 + x_2$.



Kết hợp 2 vòng gom có kết quả của hàm f viết theo dạng chính tắc 2:

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_3).(x_1+x_2)$$
$$= x_1.x_1 + x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3$$
$$= x_1 + x_1.x_2 + x_1.x_3 + x_2.x_3$$

$= x_1(1+ x_2 + x_3) + x_2.x_3$
$= x_1 + x_2.x_3$

Nhận xét: Trong ví dụ này, hàm ra viết theo dạng chính tắc 1 và hàm ra viết theo dạng chính tắc 2 là giống nhau. Tuy nhiên có trường hợp hàm ra của hai dạng chính tắc 1 và 2 là khác nhau, nhưng giá trị của hàm ra ứng với một tổ hợp biến đầu vào là giống nhau trong cả 2 dạng chính tắc.

Chú ý: Người ta thường cho hàm Boole dưới dạng biểu thức rút gọn. Vì có 2 cách biểu diễn hàm Boole theo dạng chính tắc 1 hoặc 2 nên sẽ có 2 cách cho giá trị của hàm Boole ứng với 2 dạng chính tắc đó:

Dạng chính tắc 1: Tổng các tích số.

$f(x_1, x_2, x_3) = \Sigma(3, 4, 7) + d(5, 6)$

Trong đó d: giá trị các ô này là tùy định (d: don't care)

$f(x_1,x_2,x_3)$ x_3 \ x_1,x_2	00	01	11	10
0	0	0	X	1
1	0	1	1	X

Lúc đó bảng Karnaugh sẽ được cho như hình trên. Từ biểu thức rút gọn của hàm ta thấy tại các ô ứng với tổ hợp nhị phân các biến vào có giá trị là 3, 4, 7 thì hàm ra có giá trị bằng 1; tại các ô ứng với tổ hợp nhị phân các biến vào có giá trị là 5,6 thì hàm ra có giá trị là tùy định; hàm ra có giá trị bằng 0 ở những ô còn lại ứng với tổ hợp các biến vào có giá trị là 0, 1, 2.

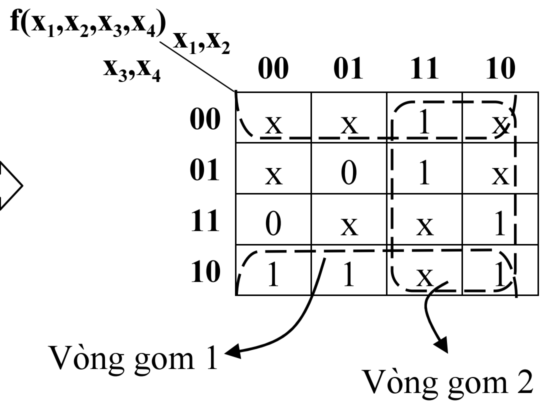
Dạng chính tắc 2: Tích các tổng số.

Phương trình logic trên cũng tương đương:

$f(x_1, x_2, x_3) = \Pi(0, 1, 2) + d(5, 6)$

Ví dụ 3: Tối thiểu hóa hàm 4 biến sau đây:

$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ — x_3,x_4 \ x_1,x_2	00	01	11	10
00	x	x	1	x
01	x	0	1	x
11	0	x	X	1
10	1	1	X	1



Ta thực hiện tối thiểu hóa theo dạng chính tắc 1: Từ bản đồ Karnaugh ta có 2 vòng gom, vòng gom 1 gồm 8 ô kế cận và vòng gom 2 gồm 8 ô kế cận. Kết quả tối thiểu hóa như sau:

Vòng gom 1: $\overline{x}_4$

Vòng gom 2: x_1

Vậy: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x}_4 + x_1$